



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

Dipartimento di Ingegneria Industriale

Corso di Laurea in Ingegneria Industriale

La Teoria Matematica del Controllo

**Relatore:
Prof. Fabio Bagagiolo**

**Laureando:
Riccardo Zamboni**

Anno Accademico 2016/2017

Sommario

La seguente trattazione ha lo scopo di introdurre alla teoria matematica del controllo, ai suoi teoremi fondanti e ad alcuni dei risultati principali tra cui il concetto di controllabilità e di controllo ottimo. Verranno introdotti importanti risultati quali il Principio di Massimo di Pontryagin, le equazioni di Hamilton-Jacoby-Bellman e le equazioni di Riccati. Si farà particolare attenzione alle conseguenze pratiche di tali teoremi e deduzioni, quali la possibilità di utilizzare i metodi sopracitati per la sintesi di controlli feedback, al fine di sottolineare come questa teoria sia fondamentale per trattare problemi di controllo in maniera completa.

Indice

1	Introduzione	3
2	Controllabilità	6
2.1	Caso lineare	7
2.2	Caso non lineare	10
2.3	Controlli speciali	10
3	Il Principio del Massimo di Pontryagin	12
3.1	PMP per Sistemi Autonomi	13
3.2	Analogia Variazionale	18
4	Equazioni di Hamilton-Jacoby-Bellman	21
4.1	Programmazione dinamica	21
4.2	Controllo Ottimo a Tempo Continuo	23
4.3	Sintesi di controlli Feedback	25
4.4	Legame HJB e PMP	26
4.5	Soluzioni generalizzate	29
4.6	Principio Bang-Bang Debole	29
5	Esempio Applicativo	32

Capitolo 1

Introduzione

Per fornire una chiara definizione dell'ambiente in cui questa trattazione si muove, come si legge in [9]

La Teoria del Controllo studia i metodi per capire, governare e modificare il comportamento di sistemi dinamici, naturali o artificiali, al fine di guidarli a raggiungere finalità assegnate. Per sistema dinamico si intende un insieme di grandezze variabili nel tempo in modo interdipendente. I sistemi dinamici oggetto della teoria del controllo possono essere di natura diversa: essi sono in molti casi sistemi fisici elementari (per es., meccanici, elettrici, termodinamici), ma vi sono anche sistemi di natura biologica, economico-finanziaria, ecologica e ambientale. Spesso, in un sistema controllato convivono e interagiscono elementi differenti, in particolare le grandezze fisiche del sistema da controllare, e le informazioni usate dalla logica del controllo.

Formulazione matematica

Come viene costruita in [2], nella seguente trattazione si fa riferimento a $\Omega = \{\mathbf{c} : \mathbf{c} \in \mathbb{R}^m, |c^i| \leq 1, i = 1, 2, \dots, m\}$ il cubo unitario in \mathbb{R}^m . Viene definito $\mathcal{U}_m = \{\mathbf{u}(\cdot) : \mathbf{u}(\cdot) \in \Omega \text{ e } \mathbf{u}(\cdot) \text{ misurabile}\}$. Ogni controllo può quindi essere definito per un preciso istante t_1 , specifico per ogni controllo.

Si noti come richiedere che $\mathbf{u}(\cdot)$ sia misurabile identifica funzioni molto generali, come risulta dalla definizione di misurabilità e funzione misurabile presente in [8]. Tale condizione deriva dalla necessità di assicurarsi che le funzioni siano quanto meno integrabili, dato che molte delle operazioni necessarie in questo ambito sono di integrazione. Si sottolinea che in molti casi pratici le funzioni posseggono maggiore regolarità, come nel caso delle funzioni costanti a tratti.

Per ogni istante $t \geq 0$ si definisce un insieme target $\mathcal{T}(t) \subset \mathbb{R}^n$, dove $\mathcal{T}(t)$ è definito come insieme chiuso. Durante tutta la trattazione il target verrà

assunto come $\mathcal{T}(t) \equiv \mathbf{0} \forall t \geq 0$ per semplicità, ma eventuali altri valori non riducono la generalità delle considerazioni. Tale semplificazione deriva dal fatto che in caso contrario sarebbe necessario analizzare anche l'evoluzione del target, indicato quindi da ora in poi con \mathcal{T} .

Infine viene descritta la dinamica del sistema (l'evoluzione dello stato $\mathbf{x}(t)$ sotto effetto del controllo $\mathbf{u}(t)$) dall'equazione vettoriale alle derivate ordinarie

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) & \mathbf{f} : [0, \infty] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Per non incorrere in casistiche specifiche si assume che $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$, $\frac{\partial f^i}{\partial x^i}$, $\frac{\partial f^i}{\partial u^k}$ ($i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m$) siano tutte continue, ovvero $\mathbf{f} \in C^1$. Queste ipotesi permettono l'esistenza e l'unicità di una soluzione per 1.1 definito un controllo $\mathbf{u}(\cdot) \in \mathcal{U}_m$.

Si nota che poichè $\mathbf{u}(\cdot)$ è richiesto essere soltanto misurabile e limitato (è appartenente ad Ω) allora \mathbf{f} sarà necessariamente continua rispetto ad \mathbf{x} ma solo misurabile e limitata in t per ogni \mathbf{x} . Sotto queste ipotesi le soluzioni saranno assolutamente continue e soddisferanno 1.1 quasi ovunque. Inoltre è importante specificare che proprio per queste ragioni sebbene il controllo sia definito su un intervallo $[0, t_1)$ non può essere assicurato che la risposta sia definita sul medesimo intervallo. Nel caso in cui la dinamica sia lineare,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t) \quad (1.2)$$

con $A(t), B(t)$ almeno continue su $[0, t_1)$ allora la soluzione è totalmente estendibile su $[0, t_1)$. Considerando la grande classe di problemi che il caso lineare copre, questo risultato è molto generale.

La soluzione di 1.1 per uno specifico controllo $\mathbf{u}(\cdot)$ è detta *risposta* ad $\mathbf{u}(\cdot)$ e viene definita come $\mathbf{x}[t] \equiv \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, \mathbf{u}(\cdot))$.

Il *problema di controllo*,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad \mathbf{u}(\cdot) \in \mathcal{U}_m \quad \mathcal{T} \text{ dati} \quad (1.3)$$

equivale a identificare quali \mathbf{x}_0 e $\mathbf{u}(\cdot) \in \mathcal{U}_m$ hanno una *risposta* appartenente all'insieme target, ovvero $\mathbf{x}[t_1] \in \mathcal{T}$ per qualche $t_1 > 0$ finito. In tal caso si dice che il controllo *conduce* lo stato iniziale all'obiettivo del controllo ed è definito come controllo *di successo*.

In queste circostanze si pone quindi il vero e proprio problema di *controllabilità*, e dell'esistenza di un *controllo ottimo*.

- *Controllabilità* : consiste nella definizione di condizioni algebriche che assicurino che il sistema può essere condotto ad un target definito. In questa analisi si noterà come possano valere teoremi molto potenti limitandosi a considerare una classe particolare di controlli, ovvero quella bang-bang, da cui l'omonimo principio cardine.

- *Controllo Ottimo* : consiste nel definire il migliore controllo per il sistema, ovvero quello che minimizzi o massimizzi un ben definito *funzionale costo* , dove

$$P[\mathbf{u}(\cdot)] \triangleq \int_{t_0}^{t_1} f^0(\mathbf{x}[t], \mathbf{u}(t)) dt \quad (1.4)$$

Nel caso di un'ottimizzazione a tempo finito e termine libero la formula precedente è della forma:

$$P[\mathbf{u}(\cdot)] \triangleq \int_0^T r(\mathbf{x}[t], \mathbf{u}(t)) dt + g(\mathbf{x}(T)) \quad (1.5)$$

con \mathbf{x} soluzione del problema di controllo per lo specifico \mathbf{u} . La funzione r è il costo in itinere, ovvero il costo per essere arrivati fino allo stato specifico, g è il costo terminale, relativo al costo per trovarsi allo stato specifico al tempo T . In molti casi ingegneristici l'intervallo di integrazione è definito da un t_0 ad un T , dove a variare è il primo. Nel caso di un'ottimizzazione a tempo libero e termine fisso è della forma:

$$P[\mathbf{u}(\cdot)] \triangleq \int_0^{\tau} r(\mathbf{x}[t], \mathbf{u}(t)) dt \quad \tau = \tau[\mathbf{u}(\cdot)] : \mathbf{x}(\tau) \in \mathcal{T} \quad (1.6)$$

Il *problema base* di controllo ottimo sta nell'individuare, nel caso esista, proprio il controllo ottimo $\mathbf{u}^*(\cdot)$, ovvero (nel caso di minimizzazione)

$$\mathbf{u}^*(\cdot) : P[\mathbf{u}^*(\cdot)] \leq P[\mathbf{u}(\cdot)] \quad \forall \mathbf{u}(\cdot) \in \mathcal{U}_m \quad (1.7)$$

Qui si inseriscono gli importanti risultati del *Principio di Massimo di Pontryagin* e della *Programmazione Dinamica*, entrambi legati alla possibilità di definizione di un controllo ottimo e strettamente connessi l'uno all'altro.

Capitolo 2

Controllabilità

Formulazione matematica

Nel problema di controllo 1.3 viene definito come problema di *controllabilità* l'individuazione degli stati iniziali $\mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0$ tali per cui *esiste almeno un* controllo che conduca tale stato all'insieme target *in un tempo finito*, senza definire ancora un funzionale di costo. In tal caso viene definito l'*insieme controllabile*

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n : \exists \mathbf{u}(\cdot) \in \mathcal{U}_m, t_1 \geq 0 : \mathbf{x}[t_1] \in \mathcal{T}\}$$

Nei problemi di controllabilità e in generale nell'applicazione della teoria del controllo a casistiche reali può essere utile considerare speciali classi di controlli, più simili a quelli sintetizzabili. Questo equivale a considerare sottoinsiemi di \mathcal{U}_m :

1. $\mathcal{U}_{PC} = \{\mathbf{u}(\cdot) \in \mathcal{U}_m : \mathbf{u}(\cdot) \text{ costante a tratti}\}$
ovvero la classe dei controlli *costanti a tratti*, per cui esiste una partizione del tempo tale che il controllo è costante su ogni sottointervallo di partizione.
2. $\mathcal{U}_{BB} = \{\mathbf{u}(\cdot) \in \mathcal{U}_m : |u^i| \equiv 1, i = 1, \dots, m\}$
ovvero la classe dei *controlli bang-bang*. Questa classe di controlli utilizza solo i punti estremali dell'insieme di controllo (Ω è il cubo unitario) ed è di facile sintesi. Inoltre relativamente a tale classe di controlli esistono teoremi molto potenti, ne segue l'attenzione che gli verrà dedicata in questa trattazione.
3. $\mathcal{U}_{BBPC} = \{\mathbf{u}(\cdot) \in \mathcal{U}_m : \mathbf{u}(\cdot) \text{ costante a tratti e } |u^i| \equiv 1, i = 1, \dots, m\}$
ovvero la classe dei controlli costanti a tratti e che inoltre assumono solo i valori estremali.

2.1 Caso lineare

Si consideri prima di tutto che il caso lineare (L) è una particolarizzazione del caso non lineare (NL), sia esso autonomo (A), ovvero non dipendente esplicitamente dal tempo, o meno. Segue

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (\text{NLA})$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (\text{LA}) \quad \mathbf{A}, \mathbf{B} \text{ matrici}$$

Nel caso lineare non autonomo si ha che $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$, nel caso autonomo costanti.

Si ricorda che, sotto ipotesi di unicità (valide nel nostro caso), l'unica soluzione del problema (LA), ovvero di una ODE non omogenea è definita dalla *formula di variazione dei parametri* considerando $\mathbf{B}\mathbf{u}$ come parte non omogenea,

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)ds$$

dove $e^{\mathbf{A}t}$ è la matrice esponenziale. Dalla formula di variazione dei parametri segue direttamente che la formulazione più semplice di controllabilità dello stato iniziale \mathbf{x}_0 è

$$\mathbf{x}_0 \in \mathcal{C} \iff \exists \mathbf{u}(\cdot) \in \mathcal{U}_m : \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$$

ovvero,

$$0 = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)ds \quad (\text{LA})$$

da cui segue,

Definizione 2.1.1 (stato iniziale controllabile).

$$\mathbf{x}_0 \in \mathcal{C} \iff \mathbf{x}_0 = - \int_0^t e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)ds \text{ per qualche controllo } \mathbf{u}(\cdot) \in \mathcal{U}_m.$$

Seguono una serie di teoremi introduttivi finalizzati a garantire la validità di teoremi più potenti. Essi descrivono le caratteristiche dell'insieme controllabile e una sua proprietà algebrica:

Teorema 2.1.2. *Per un sistema (NLA),*

\mathcal{C} è connesso per archi. Inoltre \mathcal{C} è aperto $\iff \mathcal{T} \in \text{Int}\mathcal{C}$.

Il Teorema 2.1.2 stabilisce che nell'insieme controllabile ogni controllo è ottenibile come composizione di controlli di successo (connessione per archi). La condizione $\mathcal{T} \in \text{Int}\mathcal{C}$ è molto importante: delle fluttuazioni abbastanza piccole che allontanino lo stato dal target verranno automaticamente annullate; nei casi reali queste fluttuazioni sono sempre presenti. Inoltre trovandosi abbastanza vicino allo stato target è possibile raggiungere quest'ultimo indipendentemente dalla direzione di controllo (negli stati).

Teorema 2.1.3. *Per un sistema (LA), l'insieme controllabile $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ è simmetrico e convesso.*

Il Teorema 2.1.3 descrive la struttura dell'insieme controllabile come simmetrica e chiusa rispetto a combinazione convessa, ma non è valido per classi di controlli che non siano simmetrici o convessi (\mathcal{U}_{BB}), perchè in tal caso Ω non è chiuso rispetto a combinazione convessa.

Definita la *matrice di controllabilità* per (LA)

$$M \in \mathbb{R}^{n \times (mn)} \quad M = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$$

segue,

Teorema 2.1.4. *Per un sistema (LA), $\text{rang}(M) = n \iff \mathcal{T} \in \text{Int}\mathcal{C}$ ($\iff \mathcal{C}$ aperto)*

Il Teorema 2.1.4 riconduce la possibilità di avere un target robusto rispetto a fluttuazioni allo studio delle proprietà algebriche di una ben definita matrice, propria del sistema dinamico studiato. Inoltre, poichè viene messo in gioco il rango della matrice, questa proprietà (e seguenti) è invariante per rotazione del sistema, poichè tale trasformazione non modifica il rango della matrice di controllabilità. Segue la possibilità di costruire sistemi equivalenti:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \tilde{A}(t)\mathbf{x}(t) + \tilde{B}(t)\mathbf{u}(t) = PAP^{-1}\mathbf{x} + QBQ^{-1}\mathbf{u} \\ \implies \text{rang}(\tilde{M}) &= \text{rang}(M) \end{aligned}$$

Dimostrazione.

Per 2.1.4 si considera l'assunzione $\mathcal{T} = \mathbf{0}$ e si dimostra l'equivalente $\mathbf{0} \notin \text{Int}\mathcal{C} \iff \text{rang}(M) < n$.

Considerando la definizione di stato iniziale 2.1.1 nel caso di un sistema (LA),

$$\mathbf{x}_0 = - \int_0^{t_1} e^{-As} B \mathbf{u}(s) ds \quad (2.1)$$

Dall'ipotesi che $\text{rang}(M) < n$ segue che $\exists \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{y}\| = 1 : \mathbf{y}^T A^k B = \mathbf{0}, \forall k = 0, 1, \dots, (n-1)$, ovvero poichè il rango non è massimo una delle colonne può essere scritta come combinazione lineare delle altre, su \mathbb{R}^n esiste una direzione non coperta, quindi perpendicolare ad ogni colonna di M. Ora, definito il polinomio caratteristico di A $P(\lambda) \equiv \det(\lambda I - A)$ vale il *Teorema di Cayley-Hamilton*, che impone $P(A) = 0$. Il teorema indirettamente implica che A^n può essere scritto come combinazione lineare delle potenze inferiori, $A^n = \beta_1 A^{n-1} + \dots + \beta_n (\star)$, segue

$$\mathbf{y}^T A^n B = \beta_1 \mathbf{y}^T A^{n-1} B + \beta_2 \mathbf{y}^T A^{n-2} B + \dots + \beta_n \mathbf{y}^T B = \mathbf{0}$$

Però moltiplicando (\star) per $\mathbf{y}^T A$ si ottiene $\mathbf{y}^T A^{n+1} B = \mathbf{0}$, permettendo l'induzione della relazione di ortogonalità, ovvero $\mathbf{y}^T A^k B = \mathbf{0} \forall k \in \mathbb{N}$. Si nota che

$$e^{-As} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k A^k}{k!} s^k,$$

è quindi vero che $\mathbf{y}^T e^{-As} B = \mathbf{0}$. Segue che $\forall \mathbf{x}_0 \in \mathcal{C} \mathbf{y}^T \mathbf{x}_0 = 0$ per 2.1.1. Questo equivale a dire che \mathcal{C} giace su un iperpiano perpendicolare a \mathbf{y} per ogni $t_1 > 0$. Per concludere, dato che il vettore \mathbf{y} non è banale $\mathbf{0} \notin \text{Int}\mathcal{C}$. Supponiamo ora che $\mathbf{0} \notin \text{Int}\mathcal{C}$, segue che $\forall t_1 > 0 \mathbf{0} \notin \text{Int}\mathcal{C}$. Ora, è vero che $\mathbf{0} \in \mathcal{C} \forall t_1 > 0 (\mathbf{u}(\cdot) = \mathbf{0})$, e \mathcal{C} è convesso, quindi $\forall t_1 > 0$ deve esistere un iperpiano passante per $\mathbf{0}$ tale che \mathcal{C} giaccia su uno dei due lati dell'iperpiano, cioè $\exists \mathbf{b}(t_1) \neq \mathbf{0} : \forall \mathbf{x}_0 \in \mathcal{C} \mathbf{b}^T \mathbf{x}_0 \leq 0$, allora

$$\int_0^{t_1} \mathbf{b}^T e^{-As} B \mathbf{u}(s) ds = -\mathbf{b}^T \mathbf{x}_0 \geq 0 \quad \forall \mathbf{u}(\cdot) \in \mathcal{U}_m, \forall \mathbf{x}_0 \in \mathcal{C}$$

Se si considera l'equazione (2.1) si nota che di fatto \mathbf{x}_0 definisce i vari punti raggiungibili con un controllo specifico al tempo t_1 . Poichè Ω è simmetrico deve essere possibile variare liberamente il segno del controllo specifico $\mathbf{u}(\cdot)$ in questione, ma questo implica che $\mathbf{b}^T e^{-As} B \equiv \mathbf{0}$ su $[0, t_1]$ perchè la disuguaglianza rimanga valida. Imponendo $s = 0$ e differenziando k volte l'identità appena trovata segue che $\mathbf{b}^T A^k B = \mathbf{0}, \forall k \in \mathbb{N}$. Di fatto \mathbf{b} è ortogonale alle colonne di M , segue che $\text{rang}(M) < n$. □

Facendo riferimento alla dimostrazione di 2.1.4, si definisce sistema *proprio* un sistema in cui $\mathbf{b}^T e^{-As} B \neq \mathbf{0} \forall \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Nei sistemi (LA) questo è equivalente a dire che $\text{rang}(M) = n$.

Teorema 2.1.5 (Di completa controllabilità). *Per un sistema (LA), $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n \iff \text{rang}(M) = n$ e $\text{Re} \lambda \leq 0 \quad \forall \lambda$ autovalore di A*

Il Teorema 2.1.5 definisce le condizioni più potenti sotto cui è possibile trovarsi: ogni stato possibile può subire un controllo che comporti il raggiungimento del target. Come viene fatto notare in [3], la completa controllabilità è per i sistemi (LA) un concetto duale rispetto alla completa osservabilità, che viene infatti definita da condizioni algebriche molto simili.

Teorema 2.1.6. *Per sistemi (LA) con controlli senza restrizioni, $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n \iff \text{rang}(M) = n$*

Ovvero la condizione sugli autovalori della matrice della dinamica A può essere rimossa per controlli abbastanza potenti da essere considerati non ristretti ad un insieme $(\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^n)$.

2.2 Caso non lineare

I sistemi non lineari autonomi (NLA) descritti all'inizio della sezione precedente possono essere studiati in modo simile ai (LA) sotto le assunzioni che $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ sia differenziabile con continuità rispetto alle sue due variabili: $\mathbf{f} \in C^1$, e che $\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, dove quest'ultima condizione equivale a dire che raggiunto lo stato target non sia necessario alcun controllo per rimanerci (stato di equilibrio). Su queste ipotesi, si può procedere con l'espansione della funzione di stato in un intorno di $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$, ovvero

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{f}_x(\mathbf{0}, \mathbf{0})\mathbf{x} + \mathbf{f}_u(\mathbf{0}, \mathbf{0})\mathbf{u} + o(|\mathbf{x}| + |\mathbf{u}|),$$

dove $\mathbf{f}_x(\cdot, \cdot)$ e $\mathbf{f}_u(\cdot, \cdot)$ sono le matrici Jacobiane di f rispetto ad \mathbf{x} e \mathbf{u} : $[\partial f^i / \partial x^j]$, $[\partial f^i / \partial u^j]$. In questo modo viene generato il *sistema linearizzato*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_x(\mathbf{0}, \mathbf{0})\mathbf{x} + \mathbf{f}_u(\mathbf{0}, \mathbf{0})\mathbf{u} = A_f\mathbf{x} + B_f\mathbf{u}$$

con matrice di controllabilità associata

$$M_f = \{B_f, A_f B_f, A_f^2 B_f, \dots, A_f^{n-1} B_f\}$$

Su questo sistema sono validi i seguenti teoremi,

Teorema 2.2.1. *Nei sistemi (NLA),*
 $\text{rang}(M_f) = n \implies \mathcal{T} \in \text{Int}\mathcal{C}$

Come si nota dal Teorema 2.2.1 nei casi non lineari le implicazioni sono più deboli, perchè in questo caso l'appartenenza all'interno dell'insieme controllabile non comporta una condizione sulla matrice di controllabilità.

Teorema 2.2.2. *Nei sistemi (NLA) con $\text{rang}(M_f) = n$,*
 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, \mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \implies \mathcal{C} = \mathbb{R}^n$

Il Teorema 2.2.2 evidenzia come siano necessarie proprietà molto potenti quale la globale asintotica stabilità perchè il sistema sia completamente controllabile, cosa che prevedibilmente non succedeva per sistemi (LA).

2.3 Controlli speciali

I risultati ottenuti con i teoremi precedenti per sistemi (LA) e (NLA) hanno come oggetto controlli molto generici. Può essere utile quindi riconsiderare i teoremi di controllabilità alla luce di particolari classi di controlli come quelle citate all'inizio del capitolo, perchè di sintesi più facile.

In generale tutti i teoremi precedentemente citati valgono per classi di controllo specifiche quali $\mathcal{U}_{PC}, \mathcal{U}_{BB}, \mathcal{U}_{BBPC}$. Con eccezione di:

- $\text{rang}(M) = n \iff \mathcal{T} \in \text{Int}\mathcal{C}$ per (LA)
- $\text{rang}(M) = n \implies \mathcal{T} \in \text{Int}\mathcal{C}$ per (NLA)

per i controlli \mathcal{U}_{BB} .

A questi teoremi si aggiungono, considerando che i casi (LA) sono una particolarizzazione dei casi (NLA):

Teorema 2.3.1. *Per sistemi (NLA),*
 $\mathcal{T} \in \text{Int}\mathcal{C}_{PC} \implies \mathcal{C}_{PC} = \mathcal{C}$

dove per \mathcal{C}_{PC} si intende l'insieme controllabile utilizzando controlli costanti a tratti. Il Teorema 2.3.1 stabilisce che la condizione $\mathcal{T} \in \text{Int}\mathcal{C}_{PC}$ è molto potente, perchè implica che qualsiasi stato raggiungibile con un controllo misurabile può essere raggiunto anche con un controllo costante a tratti. In particolari condizioni quindi è sufficiente sintetizzare controlli molto semplici, con l'assicurazione che non vi saranno modifiche negli stati controllabili.

Teorema 2.3.2 (Principio Bang-Bang). *Per sistemi lineari (anche non autonomi), avendo un controllo generico $\mathbf{u}(t)$ ristretto a $\Psi \subset \mathbb{R}^m$ compatto, il corrispondente insieme controllabile \mathcal{C}_Ψ è compatto e convesso. Definite due classi di controlli su due sottoinsiemi compatti con lo stesso inviluppo convesso, allora i due insiemi controllabili coincidono. Poichè i controlli bang-bang hanno valori ai vertici di Ω , ovvero hanno Ω come inviluppo convesso: $\mathcal{C}_{BB} = \mathcal{C} \quad \forall t_1 > 0$*

Il Principio Bang-Bang afferma di fatto che, sotto le giuste condizioni, ogni stato raggiungibile con un controllo qualsiasi è anche raggiungibile con un controllo di tipo bang-bang.

Capitolo 3

Il Principio del Massimo di Pontryagin

Introduzione

Non verrà considerata nella seguente trattazione la descrizione dei controlli ottimi dal punto di vista geometrico (spazi di controllo ottimo e loro caratteristiche) o algebrico (proprietà algebriche dei controlli ottimi). Questo perchè l'applicabilità di questi concetti è molto limitata. Verranno tralasciate anche le *condizioni sufficienti* di esistenza di controlli ottimi, utili ma non particolarmente generali, perchè basate su molte ipotesi.

Verranno quindi trattate una serie di *condizioni necessarie* che un controllo ottimo deve soddisfare; esse vanno sotto il nome di *Principio di Massimo di Pontryagin* (PMP). In quanto necessarie esse non garantiscono che il controllo per cui risultino valide sia esistente; in particolare l'insieme dei controlli ottimi potrebbe essere l'insieme vuoto, mentre quello risultante dalle condizioni di Pontryagin non vuoto. Le ragioni di utilizzo risiedono nel fatto che tali condizioni sono molto stringenti e solitamente riducono la classe dei controlli *potenzialmente* ottimi ad una cerchia ristretta, permettendo di intervenire con condizioni sufficienti o sperimentazione diretta ex post.

Tutto il seguente capitolo farà riferimento a controlli misurabili e all'integrazione secondo Lebesgue; nel caso in cui si trattassero controlli costanti a tratti si potrebbe ricorrere all'integrazione secondo Riemann e il concetto di "quasi ovunque" dovrebbe essere però sostituito da quello più debole di "ovunque a meno di un insieme finito di punti".

La derivazione del (PMP) verrà fatta seguendo rispettivamente [2] nella derivazione diretta e [3] nell'analogia variazionale.

3.1 PMP per Sistemi Autonomi

Definito il problema autonomo:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), & \mathbf{x}[t] \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, & \mathcal{T} = \mathbf{x}_1 \end{cases} \quad (3.1)$$

con costo generico definito da (1.4), dove t_1 è il tempo di arrivo non specificato. Usato l'insieme di controllo

$$\mathbf{u}(\cdot) \in \mathcal{U}_m = \{\mathbf{u}(\cdot) : \mathbf{u}(\cdot) \text{ misurabile}, \mathbf{u}(t) \in \Psi, t \in [t_0, t_*]\}$$

con Ψ restrizione dell'insieme di controllo, $\Psi \subset \mathbb{R}^m$ e t_* dipendente dal controllo scelto.

Le ipotesi su cui si basa la derivazione del (PMP) sono che \mathbf{f} e f^0 siano continue rispetto a (\mathbf{x}, \mathbf{u}) e differenziabili con continuità rispetto a \mathbf{x} .

Viene quindi introdotta

Definizione 3.1.1 (Variabile di costo dinamico). *La variabile di costo dinamico per uno specifico controllo $\mathbf{u}(\cdot)$ e gli stati associati $\mathbf{x}[\cdot]$ è definita come:*

$$x^0[t] = \int_{t_0}^t f^0(\mathbf{x}[s], \mathbf{u}(s)) ds$$

Segue che per un controllo di successo è ben definito $\mathbf{x}[t_1] = \mathbf{x}_1$ per qualche $t_1 \geq t_0$ e il costo associato $x^0[t_1]$. Nel caso in cui il controllo sia ottimo allora $x^0[t_1]$ è il più piccolo possibile.

La variabile di costo dinamico può essere usata per eseguire un aumento dimensionale: è introdotto il vettore $(n+1)$ -dimensionale $\hat{\mathbf{x}}[t] = (x^0[t], \mathbf{x}^T[t])^T$ detto *risposta aggiunta* e $\hat{\mathbf{f}}(t, \hat{\mathbf{x}}) = (f^0, \mathbf{f}^T)^T$.

In questo modo il problema di controllo è ridefinito come

Definizione 3.1.2 (Problema Esteso ($\hat{\mathbf{1}}$)).

$\exists ? \mathbf{u}(\cdot) : \text{ la soluzione di } \dot{\hat{\mathbf{x}}}[t] = \hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{x}}[t], \mathbf{u}(t)) \text{ q.o. } \hat{\mathbf{x}}[t_0] = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{x}_0 \end{bmatrix},$
finisca a $\begin{bmatrix} x^0[t_1] \\ \mathbf{x}_1 \end{bmatrix}$ *(\mathbf{x}_1 stato di termine)(con $x^0[t_1]$ il più piccolo possibile).*

La richiesta che la soluzione soddisfi l'equazione quasi ovunque deriva dal fatto che $\hat{\mathbf{f}}$ è solo misurabile in t .

A livello visivo questo problema corrisponde a richiedere che il vettore di stato esteso colpisca la linea

$$\hat{\mathcal{T}} = \{(\xi, \mathbf{x}_1) : \xi \in \mathbb{R}, \mathbf{x}_1 \text{ target}\}$$

il più in basso possibile sull'asse x^0 .

Ora segue:

Definizione 3.1.3 (Aggiunto alla linearizzazione di $(\hat{1})$ e co-stati estesi).

Per un controllo ammissibile $\mathbf{u}(\cdot)$ e la risposta aggiunta associata $\hat{\mathbf{x}}[\cdot]$ si considera il sistema lineare $(n+1)$ -dimensionale:

$$(\hat{A}d) \quad \dot{\hat{\mathbf{w}}}(t) = -\hat{\mathbf{f}}_{\hat{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}[t], \mathbf{u}(t))^T \hat{\mathbf{w}}(t) \quad q.o. \quad (3.2)$$

Le soluzioni di questa equazione prendono il nome di co-stati estesi.

Per $\hat{\mathbf{f}}_{\hat{\mathbf{x}}}$ si intende la matrice Jacobiana di $\hat{\mathbf{f}}$ rispetto al vettore di stato esteso $\hat{\mathbf{x}}$. Ora, poichè nessuna componente della funzione estesa contiene x^0 la matrice Jacobiana ha la forma

$$\hat{\mathbf{f}}_{\hat{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}[t], \mathbf{u}(t)) = \left[\frac{\partial \hat{f}^i}{\partial \hat{x}^j} \right] = \begin{bmatrix} 0 & \partial f^0 / \partial x^1 & \dots & \partial f^0 / \partial x^n \\ 0 & \partial f^1 / \partial x^1 & \dots & \partial f^1 / \partial x^n \\ \vdots & & & \\ 0 & \partial f^n / \partial x^1 & \dots & \partial f^n / \partial x^n \end{bmatrix}$$

Può essere utile visualizzare geometricamente il significato dell'aggiunto alla linearizzazione: per uno specifico controllo $\mathbf{u}(\cdot)$ la soluzione di $(\hat{1})$ è una curva in \mathbb{R}^{n+1} . Definito $\hat{\mathbf{b}}_0$ vettore tangente alla curva $\hat{\mathbf{x}}[\cdot]$ nel punto $\hat{\mathbf{x}}[t_0]$ allora la soluzione dell'equazione linearizzata:

$$\dot{\hat{\mathbf{b}}}(t) = \hat{\mathbf{f}}_{\hat{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}[t], \mathbf{u}(t))\hat{\mathbf{b}}(t), \quad \hat{\mathbf{b}}(t_0) = \hat{\mathbf{b}}_0, \quad u(t) \text{ costante}$$

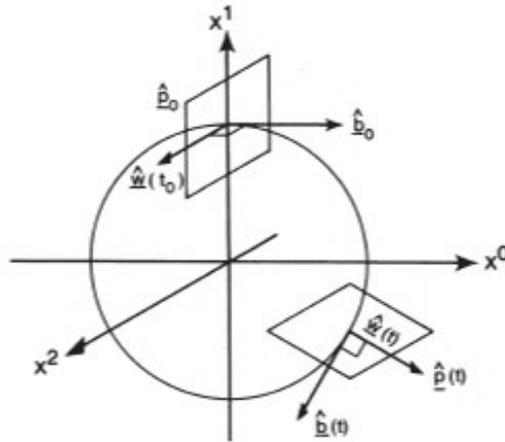


Figura 3.1: Andamento dei vettori tangenti e normali agli stati

definisce la tangente alla curva $\hat{\mathbf{x}}[t] \forall t$. In generale l'equazione linearizzata descrive l'andamento della tangente alla curva della dinamica del sistema esteso. Considerando la forma dell'equazione aggiunta si capisce come essa

descrive l'andamento dei vettori che giacciono sull'iperpiano n -dimensionale individuato dal vettore tangente (Figura 3.1).

Nel caso in cui il controllo non sia costante la soluzione dell'aggiunto alla linearizzazione ($\hat{A}d$) corrisponderà alla descrizione dell'evoluzione delle perturbazioni approssimata al primo ordine, da cui la natura della soluzione del sistema aggiunto.

Definizione 3.1.4 (Hamiltoniana del problema di controllo).

Se si definisce per il co-stato $\hat{w}(\cdot)$ la funzione a variabili reali nel tempo:

$$H(\hat{w}, \hat{x}, \mathbf{u}) = \langle \hat{w}, \hat{f} \rangle = \sum_{j=0}^n w^j(t) f^j(x^0, \mathbf{x}[t], \mathbf{u}(t)) \quad (3.3)$$

Considerando che la funzione H non dipende da x^0 (perchè nessun termine f^i dipende da x^0), si scriverà $H(\hat{w}, \mathbf{x}, \mathbf{u})$.

Segue che H è un'Hamiltoniana per il sistema ($\hat{1}$) e l'aggiunto alla linearizzazione ($\hat{A}d$), ovvero:

$$(\hat{1}) \quad \dot{\hat{x}} = \nabla_{\hat{w}} H(\hat{w}, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \left(\frac{\partial H}{\partial w^0}, \frac{\partial H}{\partial w^1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial w^n} \right)^T \quad q.o.$$

$$(\hat{A}d) \quad \dot{\hat{w}} = -\nabla_{\hat{x}} H(\hat{w}, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = - \left(\frac{\partial H}{\partial x^0}, \frac{\partial H}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x^n} \right)^T \quad q.o.$$

Considerando l'Hamiltoniana $H = \sum_{j=0}^n w^j f^j(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ come una funzione di vettori arbitrari \hat{w}, \mathbf{x} , e $\mathbf{v} \in \Psi$, fissati $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\hat{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$, si definisce

$$M(\hat{w}, \mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{v} \in \Psi} H(\hat{w}, \mathbf{x}, \mathbf{v})$$

Ovvero la funzione M è il valore maggiore di H che si può ottenere con controlli ammissibili, segue

Teorema 3.1.5 (Principio di Massimo di Pontryagin). *Si consideri il problema di controllo esteso ($\hat{1}$) soggetto a controlli misurabili $\mathbf{u}(\cdot) \in \Psi \subset \mathbb{R}^m$ limitato. Ipotizzando che $(\mathbf{u}(\cdot), \hat{\mathbf{x}}[\cdot])$ sia la coppia di controllo e risposta ottima, allora esiste una funzione assolutamente continua $\hat{w}(\cdot)$ soluzione di ($\hat{A}d$) q.o. su $[t_0, t_1]$, con*

$$(i) \quad H(\hat{w}(t), \mathbf{x}[t], \mathbf{u}(t)) = \sup_{\mathbf{v} \in \Psi} H(\hat{w}, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = M(\hat{w}[t], \mathbf{x}[t]) \quad q.o.$$

$$(ii) \quad M(\hat{w}[t], \mathbf{x}[t]) = 0 \quad su [t_0, t_1]$$

$$(iii) \quad w^0(t) = w^0(t_0) \leq 0 \quad e \quad \hat{w}(t) \neq \mathbf{0} \quad su [t_0, t_1]$$

Il PMP afferma che se un controllo $\mathbf{u}(\cdot)$ è ottimo per $(\hat{1})$ allora c'è una coppia risposta-aggiunto associata $(\hat{\mathbf{x}}[\cdot], \hat{\mathbf{w}}(\cdot))$ tale che per ogni istante t $H(\hat{\mathbf{w}}(t), \mathbf{x}[t], \mathbf{v}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \Psi$. L'uguaglianza viene ottenuta con il controllo ottimo, ovvero $\mathbf{v} = \mathbf{u}(t)$, ma non trattandosi di una condizione sufficiente è possibile che esistano altri controlli che soddisfano l'uguaglianza.

Proprio quest'ultima condizione di massimo è la condizione più stringente per eventuali controlli ottimi, e nel caso in cui la classe dei controlli sia ristretta a casi speciali le condizioni possono essere estese *ovunque*.

Si può notare come il caso precedente corrispondesse ad un problema di controllo a tempo libero e termine fisso (1.6). Nel caso in cui si volesse operare su problemi a tempo fisso e termine libero (1.5) la formulazione è totalmente equivalente (operando su T), a differenza che

$$\begin{cases} M(\hat{\mathbf{w}}[t], \mathbf{x}[t]) = \text{costante} & \text{su } [t_0, T] \\ \hat{\mathbf{w}}(T) = \nabla g(\hat{\mathbf{x}}(T)) \end{cases} \quad (3.4)$$

La seconda condizione è chiamata *condizione di trasversalità* (Figura 3.2) e corrisponde a dire che se si definiscono due insiemi di appartenenza per la condizione iniziale e la condizione finale, il co-stato è perpendicolare a entrambi i piani tangenti i due insiemi nei punti sopra citati rispettivamente nell'istante iniziale e finale.

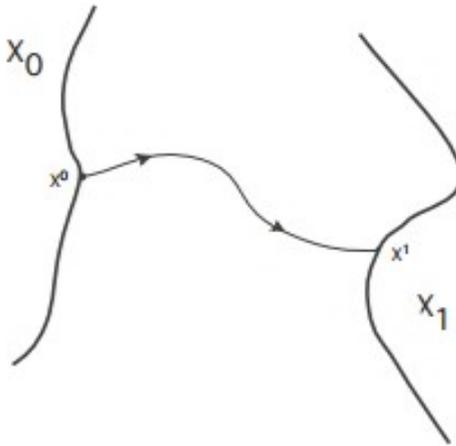


Figura 3.2: Condizione di Trasversalità [3]

Il PMP è una condizione necessaria sui problemi di controllo ottimo, solitamente quindi viene accoppiata ad una verifica di esistenza di controlli ottimi. Nel caso in cui f sia lineare, \mathcal{U} e le funzioni di costo g e r siano convesse (*Ipotesi di Convessità*) il PMP diviene necessario e sufficiente.

Una derivazione più intuitiva di (iii) ed esplicativa della condizione di tra-

versalità è presente in [7].

Si considera il problema di controllo generico

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) & \mathbf{f} : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (3.5)$$

e il *problema di Mayer* (Figura 3.3)

$$\max_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}_m} P(\mathbf{x}(T), \mathbf{u})$$

ovvero di massimizzazione di un certo costo da pagare alla fine del processo di controllo.

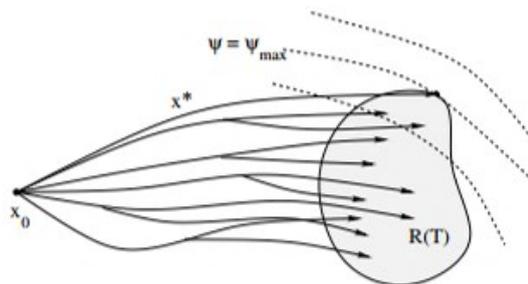


Figura 3.3: Problema di Mayer: $\psi = P$, $R(T)$ insieme raggiungibile all'istante T [7]

Ora, data l'ODE generica $\dot{\mathbf{x}} = g(t, \mathbf{x})$ con g misurabile in t e differenziabile con continuità in \mathbf{x} , si considera la traiettoria ottima e il relativo controllo ottimo \mathbf{x}^* , \mathbf{u}^* e una variazione locale del controllo per un fissato istante $\tau \in]0, T]$ e un $\epsilon > 0$

$$\mathbf{u}_\epsilon(t) = \begin{cases} \omega & t \in [\tau - \epsilon, \tau] \\ \mathbf{u}^* & \text{altrimenti} \end{cases}$$

che determina uno stato perturbato \mathbf{x}_ϵ . Assunto che per un certo istante s si abbia rispetto alla famiglia di soluzioni vicine a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}_\epsilon(s) - \mathbf{x}(s)}{\epsilon} = v(s)$$

allora è possibile individuare il vettore tangente allo stato

$$v(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}_\epsilon(t) - \mathbf{x}(t)}{\epsilon}$$

ben definito su $[0, T]$ e soluzione di

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{g}_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}(t))\mathbf{v}(t)$$

con $\mathbf{g}_{\mathbf{x}}$ matrice Jacobiana di \mathbf{g} rispetto a \mathbf{x} . A questo punto si definisce il *sistema aggiunto* come

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = -\mathbf{w}(t)\mathbf{g}_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}(t))$$

ne segue che il prodotto scalare $\langle \mathbf{w}(t), \mathbf{v}(t) \rangle = 0, \forall t \in [0, T]$. Dalle proprietà della traiettoria ottima segue che $P(\mathbf{x}_\epsilon(T)) \leq P(\mathbf{x}^*(T))$ ed è inoltre vero che il gradiente del costo individua la direzione di massima variazione dello stesso, ovvero la traiettoria ottima, come espresso da (3.4). Segue che

$$\langle \mathbf{w}(T), \mathbf{v}(T) \rangle = \langle \nabla P(\mathbf{x}^*(T)), \mathbf{v}(T) \rangle \leq 0$$

una condizione però vera in ogni istante e che permette quindi una regressione temporale (Figura 3.4) della condizione sul prodotto scalare, data la costanza di quest'ultimo. Questa espressione è la stessa della condizione (iii).

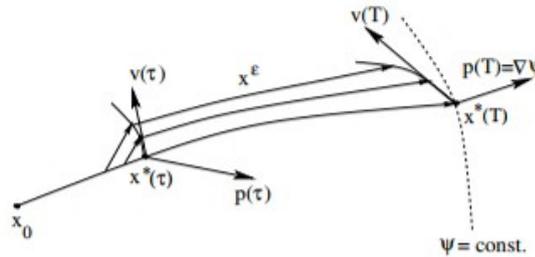


Figura 3.4: Regressione temporale [7]

3.2 Analogia Variazionale

Come viene fatto notare in [3] e in [1] l'analogia tra il calcolo delle variazioni e la derivazione del PMP sorge appena si definisce il problema base del calcolo delle variazioni come il trovare una curva $\mathbf{x}^*(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ che massimizzi il funzionale

$$I[\mathbf{x}(\cdot)] \triangleq \int_0^T L(\mathbf{x}[t], \dot{\mathbf{x}}(t))dt \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_1 \tag{3.6}$$

Dove L è la Lagrangiana del sistema, ovvero una funzione $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : L = L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$. Come si può notare il funzionale definito nel problema variazionale è molto simile al funzionale costo in 1.4. A questo punto si può definire:

Teorema 3.2.1 (Equazioni di Eulero-Lagrange). *Sia \mathbf{x}^* soluzione del problema base del calcolo delle variazioni, allora \mathbf{x}^* è soluzione delle equazioni differenziali di Eulero-Lagrange (EL):*

$$\frac{d}{dt} [\nabla_{\mathbf{v}} L(\mathbf{x}^*(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t))] = \nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^*(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t))$$

Dove per $\nabla_{\mathbf{v}} L, \nabla_{\mathbf{x}} L$ si intendono i gradienti della Lagrangiana secondo rispettivamente la velocità e la posizione. Come accadeva per il PMP, il senso delle equazioni (EL) è che trovate le soluzioni di queste, la soluzione del problema base è tra queste, nel caso esista.

Continuando

Definizione 3.2.2. *Per una curva $\mathbf{x}(\cdot)$, si definisce $\mathbf{p}(t) = \nabla_{\mathbf{v}} L(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) \quad t \in [t, T]$ $\mathbf{p}(\cdot)$ è il momento generalizzato.*

Ipotizzeremo che l'equazione del momento generalizzato sia ben definita per la velocità, ovvero che esista soluzione per $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, segue

Definizione 3.2.3. *L'Hamiltoniana del sistema dinamico $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si definisce come,*

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - L(\mathbf{x}, \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{p}))$$

A questo punto si può derivare una variante delle equazioni di Eulero-Lagrange considerando l'Hamiltoniana:

Teorema 3.2.4. *Sia $\mathbf{x}^*(\cdot)$ soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange e sia $\mathbf{p}(\cdot)$ il momento generalizzato, allora la coppia $(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{p}(\cdot))$ risolve le equazioni di Hamilton:*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \nabla_{\mathbf{p}} H(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) \\ \dot{\mathbf{p}}(t) = -\nabla_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) \end{cases}$$

Inoltre $H(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t))$ è costante in t

Dal Teorema 3.2.4 si nota come il PMP consista nel definire una quantità di moto generalizzata per un particolare sistema fisico, dove questa è il co-stato e la velocità corrisponde al controllo.

I problemi variazionali sono problemi di massimizzazione o minimizzazione e possono quindi essere affrontati con il metodo dei *moltiplicatori di Lagrange*. Per esempio, definite due funzioni $g, f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, g, f \in C^1$ e un vincolo $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g(\mathbf{x}) = 0\}$ il problema di massimizzazione o minimizzazione

con tale metodo corrisponde a risolvere il sistema non lineare in incognite $(\mathbf{x}, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\begin{cases} \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}) \\ g(\mathbf{x}) = 0 \\ \nabla g(\mathbf{x}) \neq 0 \end{cases}$$

Se vengono imposti m vincoli sono richieste m variabili aggiunte λ_i

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \lambda_1 \nabla g_1(\mathbf{x}) + \lambda_2 \nabla g_2(\mathbf{x}) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(\mathbf{x})$$

Ma l'esistenza del moltiplicatore di Lagrange è solo una condizione necessaria per la massimizzazione o minimizzazione, possono quindi esistere punti del vincolo in cui sono definiti dei moltiplicatori ma che non sono punti di massimo o di minimo.

Il problema di controllo ottimo è

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) & \mathcal{T} = \{\tilde{\mathbf{x}}\} \subseteq \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \min_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}_m} P[\mathbf{u}(\cdot)] = \min_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}_m} \int_{t_0}^{t_1} f^0(\mathbf{x}[t], \mathbf{u}(t)) dt \end{cases}$$

In questo caso i punti di minimo sono infinito-dimensionali (funzioni \mathbf{u}) su un vincolo differenziale ($\dot{\mathbf{x}}(t) = \cdots$), seguirà la necessaria esistenza di un *moltiplicatore* infinito-dimensionale, ovvero una funzione. In questo caso il moltiplicatore è proprio il co-stato esteso.

Capitolo 4

Equazioni di Hamilton-Jacoby-Bellman

Introduzione

Il seguente capitolo ha lo scopo di introdurre una forma alternativa al PMP, come le equazioni di Eulero-Lagrange e il teorema dell'Hamiltoniana nel problema variazionale. Per fare questo si sfrutterà un importante paradigma di programmazione, quello della *programmazione dinamica* (PD). Sulla base di ciò verrà dedotto un principio di ottimalità nel caso a tempo discreto noto come *principio di ottimalità di Bellman*. Infine si applicherà tale principio al problema di controllo ottimo arrivando a derivare, sotto alcune ipotesi, la cosiddetta *equazione di Hamilton-Jacoby-Bellman* (HJB), una forma alternativa del PMP. Benchè presupponga alcune ipotesi stringenti, la derivazione sottolinea come nel problema di controllo, e più in generale nei problemi variazionali, sorgano spontaneamente concetti matematici quali i *co-stati*. Si fa notare come derivazioni più tecniche siano comunque possibili partendo da ipotesi meno stringenti. Verrà seguita la derivazione presente in [4], e con lo scopo di alleggerire la notazione verrà tralasciato il grassetto ad indicare grandezze vettoriali.

4.1 Programmazione dinamica

Viene definito il problema base su cui si opererà:

Definizione 4.1.1 (Problema base della PD).

Definito un sistema dinamico controllato tempo discreto

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= f_k(x_k, u_k), \quad k = 0, \dots, N-1 \\x_k &\in \mathcal{S}_k, u_k \in \mathcal{U}(x_k) \subset \mathcal{C}_k\end{aligned}$$

Si introducono politiche di controllo ammissibili $\pi = \{\mu_0, \dots, \mu_{N-1}\}$, ovvero successioni di funzioni $\mu_k : u_k = \mu_k(x_k) : u_k \in \mathcal{U}_k(x_k) \forall x_k \in \mathcal{S}_k$. Per una specifica politica di controllo viene definito il costo

$$J_\pi = g_N(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} g_k(x_k, \mu_k(x_k))$$

Segue la politica ottima $\pi^* : J_{\pi^*}(x_0) = \inf_{\pi \in \Pi} J_\pi(x_0)$ dipendente dallo stato iniziale.

Il costo ottimale minimizza il costo ed è definito come

$$J^*(x_0) = \inf_{\pi \in \Pi} J_\pi(x_0)$$

La PD è basata su un concetto introdotto da Bellman:

Definizione 4.1.2 (Principio di Ottimalità).

Con la politica di controllo ottimale π^* in utilizzo e il problema troncato allo stato x_i nell'istante i , volendo minimizzare la funzione cost-to-go da i a N :

$$J_i = g_N(x_N) + \sum_{k=i}^{N-1} g_k(x_k, \mu_k(x_k))$$

la politica troncata $\{\mu_i^*, \mu_{i+1}^*, \dots, \mu_{N-1}^*\}$ è la politica ottima per il sottoproblema.

Il principio di ottimalità deriva da un concetto semplice e allo stesso tempo potente: se già all'inizio la politica di controllo non fosse stata ottimale avremmo potuto minimizzare il costo cambiandone i termini da un certo punto in poi. Per induzione deriva che essa rimarrà ottimale in ogni suo istante di applicazione, una volta garantita l'esistenza e l'unicità della traiettoria fissato uno stato iniziale e un controllo. Seguendo un approccio euristico si intuisce come sia possibile derivare una politica ottimale procedendo per passi successivi, basandosi ad ogni passo sul principio di ottimalità, da cui:

Teorema 4.1.3 (PD). Dato uno stato iniziale x_0 : $J^*(x_0) = J_0(x_0)$, dove il termine destro è definito dal seguente algoritmo tempo inverso da $N-1$ a 0

$$\begin{aligned} J_N(x_N) &= g_N(x_N) \\ J_k(x_k) &= \inf_{u_k \in \mathcal{U}_k(x_k)} \{g_k(x_k, u_k) + J_{k+1}(f_k(x_k, u_k))\} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Se $u_k^* = \mu_k^*(x_k)$ minimizza il lato destro della precedente equazione per ogni k , allora la politica di controllo corrispondente è ottimale.

Il precedente algoritmo può essere molto costoso dal punto di vista computazionale, soprattutto all'aumentare degli stati in gioco, ma molte volte è l'unica opzione a garantire successo.

4.2 Controllo Ottimo a Tempo Continuo

Noto l'algoritmo PD è ora possibile procedere con l'analisi di sistemi a tempo continuo come in 1.1, definiti su un tempo finito $[0, T]$, come in molti casi di interesse ingegneristico. I controlli ammissibili trattati saranno $u(t) \in \mathcal{U}_{PC}$. Trattandosi di un problema di controllo ottimo a tempo finito si considera il funzionale costo del tipo 1.5.

$$P[\mathbf{u}(\cdot)] \triangleq \int_0^T r(\mathbf{x}[t], \mathbf{u}(t)) dt + g(\mathbf{x}(T))$$

A questo punto è possibile derivare sotto alcune ipotesi un'equazione alle derivate parziali che è soddisfatta dalla funzione cost-to-go ottimale, il corrispettivo tempo continuo dell'algoritmo PD. Le ipotesi possono essere rese meno stringenti ma la validità di tali equazioni rimane.

Dividendo $[0, T]$ in N sottointervalli usando la discretizzazione $\delta = \frac{T}{N}$ segue

$$\begin{aligned} x_k &= x(k\delta) \\ u_k &= u(k\delta) \\ x_{k+1} &= x_k + f(x_k, u_k)\delta \\ J &= g(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} r(x_k, u_k)\delta \end{aligned}$$

Può ora essere applicato l'algoritmo PD all'approssimazione tempo discreta, indicando però J^* come la funzione cost-to-go ottimale nel caso continuo, \tilde{J}^* quella nel caso approssimato.

Si contruiscono a questo punto le equazioni di PD associate

$$\tilde{J}^*(N\delta, x) = g(x)$$

$$\tilde{J}^*(k\delta, x) = \inf_{u \in \mathcal{U}} \{r(x, u)\delta + \tilde{J}^*((k+1)\delta, x + f(x, u)\delta)\}$$

Il funzionale costo in generale è richiesto avere proprietà di differenziabilità, è quindi possibile espanderlo in serie di Taylor in un intorno di $(k\delta, x)$, ottenendo

$$\begin{aligned} \tilde{J}^*((k+1)\delta, x + f(x, u)\delta) &= \tilde{J}^*(k\delta, x) + \nabla_t \tilde{J}^*(k\delta, x)\delta + \\ &+ \nabla_x \tilde{J}^*(k\delta, x)^T f(x, u)\delta + o(\delta) \end{aligned}$$

Nella precedente equazione gli operatori "gradiente" identificano i vettori rispettivamente riga e colonna delle derivate parziali rispetto a t e x .

Quindi è possibile sostituire questo termine nell'algoritmo PD ottenendo

$$\begin{aligned} \tilde{J}^*(k\delta, x) &= \inf_{u \in \mathcal{U}} \{r(x, u)\delta + \tilde{J}^*(k\delta, x) + \nabla_t \tilde{J}^*(k\delta, x)\delta + \\ &+ \nabla_x \tilde{J}^*(k\delta, x)^T f(x, u)\delta + o(\delta)\} \end{aligned}$$

Facendo il passaggio al limite e altre operazioni algebriche, supponendo che

$$\lim_{k \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0, k\delta = t} \tilde{J}^*(k\delta, x) = J^*(t, x) \quad \forall t, x$$

si ottiene la seguente equazione per il funzionale costo del problema a tempo continuo $J^*(t, x)$

Definizione 4.2.1 (Equazione HJB).

$$\begin{cases} 0 = \inf_{u \in \mathcal{U}} \{r(x, u) + \nabla_t J^*(t, x) + \nabla_x J^*(t, x)^T f(x, u)\} & \forall t, x \\ J^*(T, x) = g(x) & \forall x \end{cases}$$

L'equazione di *Hamilton-Jacoby-Bellman* è un'equazione alle derivate parziali la cui precedente derivazione informale si basa su ipotesi abbastanza stringenti, come la differenziabilità del funzionale costo. Non è quindi assicurato che essa possa essere risolta, non essendo noto a priori se il funzionale sia differenziabile o meno.

La HJB consiste in una condizione sufficiente sul controllo ottimo e la sua risoluzione in forma analitica o computazionale permette di definire una famiglia di controlli ottimi che minimizzano il termine destro dell'equazione. Segue il seguente teorema basato sull'HJB:

Teorema 4.2.2 (Teorema di Sufficienza e HJB).

Supponendo che $V(t, x)$ sia una soluzione dell'HJB, ovvero che $V(t, x)$ sia differenziabile con continuità rispetto a t e x e che sia tale che

$$\begin{cases} 0 = \inf_{u \in \mathcal{U}} \{r(x, u) + \nabla_t V(t, x) + \nabla_x V(t, x)^T f(x, u)\} & \forall t, x \\ V(T, x) = g(x) & \forall x \end{cases} \quad (4.2)$$

Allora

$$V(t, x) = J^*(t, x) \quad \forall t, x$$

Dove J^ è il funzionale costo del problema di controllo. La traiettoria di controllo $u^*(t)$ che minimizza il lato destro dell'equazione HJB è quindi ottima.*

I risultati di questo teorema derivano dalla combinazione dei risultati del PD e dell'HJB: il primo garantisce che il costo ottimale sia una soluzione dell'HJB, la seconda, sotto opportune ipotesi, garantisce che essa sia l'unica, a seguito di considerazioni sulla natura della specifica equazione alle derivate parziali.

4.3 Sintesi di controlli Feedback

Una volta definita l'HJB è possibile applicarla ad uno dei problemi principali nella teoria dei controlli, ovvero la sintesi di un controllo ottimo. Si prenderà in esame un problema molto generale ma anche esteso, per fare notare l'utilità di tale tipo di equazioni.

Definito il sistema lineare n-dimensionale con costo quadratico:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ x(T)^T Q_T x(T) + \int_0^T (x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)) dt \end{aligned}$$

Con le matrici Q_T, Q simmetriche semidefinite positive e R simmetrica definita positiva. La HJB sarà

$$\begin{aligned} 0 &= \inf_{u \in \mathcal{U}} \{x^T Q x + u^T R u + \nabla_t V(t, x) + \nabla_x V(t, x)^T (Ax + Bu)\} \\ V(T, x) &= x^T Q_T x \end{aligned}$$

Ipotizzando una soluzione della forma

$$V(t, x) = x^T K(t)x, \quad K(t) \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ simmetrica}$$

si ottiene $\nabla_x V(t, x) = 2K(t)x$ e $\nabla_t V(t, x) = x^T \dot{K}(t)x$. Sostituendo nell'HJB si ottiene

$$0 = \inf_{u \in \mathcal{U}} \{x^T Q x + u^T R u + x^T \dot{K}(t)x + 2x^T K(t)Ax + 2x^T K(t)Bu\}$$

Si utilizza il *Teorema di Fermat* rispetto al controllo u , condizione sufficiente e non solo necessaria data la stretta convessità in u

$$\begin{aligned} 2B^T K(t)x + 2Ru &= 0 \\ u &= -R^{-1}B^T K(t)x \end{aligned}$$

Sostituendo il controllo trovato nell'HJB si ottiene

$$0 = x^T (\dot{K}(t) + K(t)A + A^T K(t) - K(t)BR^{-1}B^T K(t) + Q)x \quad \forall t, x$$

Quindi, perchè V sia soluzione dell'HJB, deve essere soddisfatta una equazione differenziale matriciale nota come *equazione di Riccati*

$$\begin{cases} \dot{K}(t) = -K(t)A - A^T K(t) + K(t)BR^{-1}B^T K(t) - Q \\ K(T) = Q_T \end{cases}$$

La risoluzione dell'HJB e dell'equazione di Riccati è equivalente. In questo caso è possibile ottenere

$$\begin{aligned} J^*(t, x) &= x^T K(t)x \quad \text{costo ottimo} \\ \mu^*(t, x) &= -R^{-1}B^T K(t)x \quad \text{politica di controllo ottima} \end{aligned}$$

La costruzione delle equazioni HJB è quindi in grado di fornire strumenti operativi per sintetizzare controlli ottimi, che si passi da queste stesse o attraverso le equazioni di Riccati. Queste ultime sorgono sempre nella definizione dei problemi di sintesi e la loro risoluzione molto spesso è più agevole.

4.4 Legame HJB e PMP

Si procederà ora ad una derivazione informale del PMP passando attraverso la HJB, quindi evidenziando la loro equivalenza. Si consideri l'equazione HJB

$$\begin{cases} 0 = \inf_{u \in \mathcal{U}} \{r(x, u) + \nabla_t J^*(t, x) + \nabla_x J^*(t, x)^T f(x, u)\} & \forall t, x \\ J^*(T, x) = g(x) & \forall x \end{cases} \quad (4.3)$$

Il Teorema 4.2.2 definiva come politica ottima quella che minimizzasse il lato destro dell'equazione HJB, ovvero

$$u^*(t) = \arg \inf_{u \in \mathcal{U}} \{r(x^*(t), u) + \nabla_x J^*(t, x^*(t))^T f(x^*(t), u)\} \quad \forall t \quad (4.4)$$

In particolare si noti che non è necessario conoscere $\nabla_x J^*$ in ogni valore di x e t , ma soltanto ad un solo valore di x per ogni valore di t , ovvero $\nabla_x J^*(t, x^*(t))$. Questo fatto rende il calcolo dell'equazione precedente molto più semplice rispetto al calcolo dell'HJB.

Per procedere con la derivazione è necessario introdurre il seguente lemma

Lemma 1.

Sia $F(t, x, u)$, ($t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$), una funzione differenziabile con continuità e \mathcal{U} un sottoinsieme convesso di \mathbb{R}^m . Sia $\mu^(t, x)$ differenziabile con continuità, tale che*

$$\mu^*(t, x) = \arg \inf_{u \in \mathcal{U}} F(t, x, u) \quad \forall t, x$$

Allora:

$$\begin{aligned} \nabla_t \{\inf_{u \in \mathcal{U}} F(t, x, u)\} &= \nabla_t F(t, x, \mu^*(t, x)) \quad \forall t, x \\ \nabla_x \{\inf_{u \in \mathcal{U}} F(t, x, u)\} &= \nabla_x F(t, x, \mu^*(t, x)) \quad \forall t, x \end{aligned}$$

Dove nei termini destri si indica il gradiente, in quelli sinistri i vettori delle derivate parziali di F .

Differenziando entrambi i lati dell'HJB rispetto a x e t e sfruttando il Lemma 1 grazie alle ipotesi di regolarità si ottiene per ogni (t, x) l'equazione sui vettori delle derivate parziali

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_x r(x, \mu^*(t, x)) + \nabla_{xt}^2 J^*(t, x) + \nabla_{xx}^2 J^*(t, x)^T f(x, \mu^*(t, x)) + \\ &\quad + \nabla_x f(x, \mu^*(t, x)) \nabla_x J^*(t, x) \end{aligned}$$

$$0 = \nabla_{tt}^2 J^*(t, x) + \nabla_{xt}^2 J^*(t, x)^T f(x, \mu^*(t, x))$$

Con

$$\nabla_x f = \left(\begin{array}{ccc} \partial f^1 / \partial x^1 & \dots & \partial f^n / \partial x^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial f^1 / \partial x^n & \dots & \partial f^n / \partial x^n \end{array} \right) \Big|_{(x, \mu^*(t, x))}$$

Si è richiesto che le seguenti condizioni siano valide per ogni x e t . Quindi è possibile specializzarle lungo la traiettoria derivante dalla politica di controllo ottima in $t \in [0, T]$, in cui

$$\dot{x}^*(t) = f(x^*(t), u^*(t))$$

Segue che

$$\nabla_{xt}^2 J^*(t, x^*(t)) + \nabla_{xx}^2 J^*(t, x^*(t))^T f(x^*(t), u^*(t)) = \frac{d}{dt} (\nabla_x J^*(t, x^*(t)))$$

$$\nabla_{tt}^2 J^*(t, x^*(t)) + \nabla_{xt}^2 J^*(t, x^*(t))^T f(x^*(t), u^*(t)) = \frac{d}{dt} (\nabla_t J^*(t, x^*(t)))$$

Se si definisce quindi il *co-stato*

$$\begin{aligned} p(t) &= \nabla_x J^*(t, x^*(t)) \\ p_0(t) &= \nabla_t J^*(t, x^*(t)) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Le due precedenti equazioni divengono rispettivamente

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= -\nabla_x f(x^*(t), u^*(t))p(t) - \nabla_x r(x^*(t), u^*(t)) \\ \dot{p}_0(t) &= 0 \approx p_0(t) \text{ costante} \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned} \quad (4.6)$$

Il sistema di n equazioni differenziali del primo ordine 4.6 prende il nome di *equazione aggiunta* come si è visto nella trattazione relativa al PMP. Dalla condizione al bordo

$$J^*(T, x) = g(x) \quad \forall x \implies \nabla_x J^*(T, x) = \nabla g(x) \quad \forall x$$

segue

$$p(T) = \nabla g(x^*(T)) \quad (4.7)$$

Quindi lungo la traiettoria ottima con politica ottima vale la 4.6 con condizione al bordo 4.7, mentre la condizione sul controllo ottimo 4.4 diviene

$$u^*(t) = \arg \inf_{u \in \mathcal{U}} \{r(x^*(t), u) + p(t)^T f(x^*(t), u)\} \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.8)$$

Ora è possibile semplificare la notazione introducendo l'Hamiltoniana

$$H(x, u, p) = r(x, u) + p^T f(x, u)$$

cosicchè esattamente come avveniva nel PMP

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \nabla_p H(x^*(t), u^*(t), p(t)) \\ \dot{p}(t) &= -\nabla_x H(x^*(t), u^*(t), p(t)) \end{aligned}$$

Possiamo quindi definire il PMP in questa formulazione, considerando il problema di minimizzazione

Teorema 4.4.1 (PMP in forma HJB).

Sia $u^*(t)$ traiettoria di controllo ottimo con corrispondente traiettoria ottima $x^*(t)$, ovvero

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = f(x^*(t), u^*(t)) \\ x^*(0) = x_0 \end{cases} \quad (4.9)$$

Sia $p(t)$ soluzione dell'equazione aggiunta

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = -\nabla_x H(x^*(t), u^*(t), p(t)) \\ p(T) = \nabla g(x^*(T)) \end{cases} \quad (4.10)$$

Allora

$$u^*(t) = \arg \inf_{u \in \mathcal{U}} H(x^*(t), u(t), p(t)) \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.11)$$

Inoltre

$$\exists C : \quad H(x^*(t), u^*(t), p(t)) = C \quad \forall t \in [0, T]$$

La costanza dell'Hamiltoniana lungo la traiettoria ottima con un controllo ottimo deriva dalle equazioni (4.3), (4.5), (4.6), e come nella trattazione del PMP si nota che nel caso di un problema a tempo libero l'Hamiltoniana sarà nulla.

Il Teorema 4.4.1 così definito si presta molto bene ai problemi di sintesi, poiché permette di calcolare il controllo ottimo esplicitamente una volta definita l'Hamiltoniana del sistema.

Una possibile implementazione numerica è il *metodo a vincolo doppio*.

In questo metodo si usa la condizione di minimo 4.11 per mettere $u^*(t)$ in funzione di $x^*(t)$ e $p(t)$. Si inserisce poi il valore trovato in 4.9 e 4.10 utilizzando le rispettive condizioni al contorno. Poiché il numero delle variabili è uguale al numero delle equazioni differenziali il problema è chiuso, sebbene la soluzione possa essere difficile da trovare. Può essere usato ad esempio il *metodo del punto fisso*:

$$p_n \rightarrow (4.11) \rightarrow u^*(x, p) \rightarrow (4.9) \rightarrow x^*(p, t) \rightarrow (4.10) \rightarrow \tilde{p}_n = p_n?$$

dove la convergenza del metodo è garantita da particolari Teoremi, per esempio applicando il *Teorema delle Contrazioni*:

Su uno spazio metrico completo con funzione distanza $\|\cdot\|$ il metodo del punto fisso converge se per due funzioni $p^i, p^{ii} \exists L$ indipendente da $p^i, p^{ii}, 0 < L < 1 : \| \tilde{p}^i - \tilde{p}^{ii} \| < L \| p^i - p^{ii} \|$

4.5 Soluzioni generalizzate

La risoluzione dei problemi di controllo ottimo è stata ricondotta a equazioni differenziali, come nel caso dell'HJB. Soprattutto a causa delle non linearità, non è però sempre possibile individuare una soluzione per tali equazioni secondo la definizione classica, ovvero una funzione $u : \Omega \Rightarrow \mathbb{R}$, $u \in C^1(\Omega) \cap C(\partial\Omega)$ che verifichi l'equazione in ogni punto, nel caso dell'HJB

$$F(x, u(x), Du(x)) = 0 \quad \forall x \in \Omega \quad D \text{ gradiente} \quad (4.12)$$

In tal caso viene introdotta una cosiddetta *soluzione generalizzata*, ovvero una funzione localmente lipschitziana che soddisfi l'equazione quasi ovunque. Questo procedimento è tipico per la risoluzione di equazioni differenziali, ovvero la riduzione delle proprietà richieste ad una funzione per essere considerata soluzione, nel caso delle equazioni HJB la soluzione prende il nome di *soluzione di viscosità*. La definizione delle soluzioni di viscosità si basa sul *caricamento* delle proprietà di regolarità su altre funzioni, denominate *funzioni test* ϕ , la cui combinazione con la soluzione di viscosità, tipicamente del tipo $u(\cdot) - \phi(\cdot)$, permette di definire le soluzioni in forma debole.

Risulta sotto ipotesi alquanto generali che la funzione valore (al più solamente continua) è l'unica soluzione di viscosità dell'HJB.

Il termine "soluzione di viscosità" deriva dal fatto che, definito $\epsilon > 0$, e considerando l'equazione del secondo ordine in Ω

$$-\epsilon \Delta u(x) + F(x, u(x), Du(x)) = 0 \quad \Delta \text{ operatore di Laplace} \quad (4.13)$$

vale la seguente Proposizione

Proposizione 4.5.1. *Supposto di avere una successione $u_\epsilon \in C^2$ di soluzioni classiche di (4.13) uniformemente convergente in Ω per $\epsilon \rightarrow 0$ ad una funzione continua u , u è soluzione di viscosità di (4.12).*

Il termine $-\epsilon \Delta u$ è chiamato "termine di viscosità" e lo studio dell'equazione con $\epsilon \rightarrow 0$ "metodo della viscosità evanescente", da cui il nome soluzione di viscosità.

4.6 Principio Bang-Bang Debole

Segue una dimostrazione alternativa e meno tecnica del principio Bang-Bang, enunciato in una forma più debole, come in [5]. Essa considera delle ipotesi non particolarmente stringenti grazie a cui il procedimento totale è notevolmente alleggerito:

Teorema 4.6.1 (Principio Bang-Bang Debole).

$$\begin{aligned} f(x, u) &= f_1(x) + f_2(x)u \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m \text{ compatto,} \\ f_1 &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ lipshitziana} \\ f_2 &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m} \text{ lipshitziana} \\ u &\mapsto \ell(x, u) \text{ (funzione costo) concava e lineare } \forall x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Definito $\tilde{\mathcal{U}} \subseteq \mathbb{R}^m$ inviluppo convesso di \mathcal{U} in cui è definito un controllo $\tilde{u} = \{\tilde{v} : [0, +\infty) \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}\}$ e introdotte le funzioni valore corrispondenti P, \tilde{P} segue: $P = \tilde{P}$

Si ricorda che per *funzione lipshitziana* su Ω in uno spazio normato si intende una funzione $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ per cui esiste una costante $K \geq 0$ tale che $\|f(x) - f(y)\| \leq K\|x - y\| \forall x, y \in \Omega$.

Per *funzione concava* (in u) si intende invece che $\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$ tali che $\lambda_1 \ell(x, u_1) + \lambda_2 \ell(x, u_2) + \dots + \lambda_n \ell(x, u_n) \leq \ell(x, \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i)$.

Il Teorema 4.6.1 estende il 2.3.2 nel campo dei controlli ottimi e definisce in particolare che i due estremi inferiori su cui è definita l'ottimalità coincidono, sarà quindi almeno possibile generare una successione di controlli bang-bang che approssimino il controllo ottimo, ovvero $\exists \mathbf{u}_{BB}^n : \lim_{n \rightarrow \infty} P_{\mathbf{u}_{BB}^n} = P^*$.

Dimostrazione. Siano definiti i funzionali costo per $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} P(x) &= \inf_{u \in \mathcal{U}} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \ell(x(t), u(t)) dt \\ \tilde{P}(x) &= \inf_{\tilde{u} \in \tilde{\mathcal{U}}} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \ell(x(t), \tilde{u}(t)) dt \end{aligned}$$

a *orizzonte infinito*, ovvero senza limite temporale, la cui convergenza è garantita dal termine $e^{-\lambda t}$ all'interno dell'integrale, dove λ è detto *fattore di sconto*.

$\tilde{\mathcal{U}} \subset \mathbb{R}^m$ è compatto, \tilde{P} uniformemente continua e una soluzione di viscosità in \mathbb{R}^n di

$$\lambda \tilde{P} + \sup_{\tilde{u} \in \tilde{\mathcal{U}}} \left\{ (-f_1(x) - f_2(x)\tilde{u}) \nabla \tilde{P} - \ell(x, \tilde{u}) \right\} = 0$$

Siano

$$\tilde{H}(x, p) = \sup_{\tilde{u} \in \tilde{\mathcal{U}}} \{ (-f_1(x) - f_2(x)\tilde{u})p - \ell(x, \tilde{u}) \}$$

$$H(x, p) = \sup_{u \in \mathcal{U}} \{ (-f_1(x) - f_2(x)u)p - \ell(x, u) \}$$

Segue che è sufficiente dimostrare che $\tilde{H} = H$ perchè le due equazioni HJB coincidano e quindi $\tilde{P} = P$, in virtù dell'unicità delle soluzioni dell'HJB.

La disuguaglianza $H \leq \tilde{H}$ deriva dal fatto che $\mathcal{U} \subseteq \tilde{\mathcal{U}}$, è quindi sufficiente

dimostrare che $\tilde{H} \leq H$.

Fissato $(x, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\epsilon > 0$ segue che

$$\exists \tilde{u} \in \tilde{\mathcal{U}} : \quad \tilde{H}(x, p) - \epsilon \leq (f_1(x) - f_2(x)\tilde{u})p - \ell(x, \tilde{u})$$

Allora vale il *Teorema di Caratheodory*:

Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$, allora ogni elemento del suo involucro convesso $co(X)$ si può scrivere come combinazione convessa di al più $n + 1$ elementi di X :

$$\tilde{x} \in co(X) \implies \exists x_1, \dots, x_{n+1} \in X, \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_{n+1} \geq 0 \left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right) :$$

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$$

Nel caso in esame quindi esisteranno $u_1, \dots, u_{n+1} \in \mathcal{U}$, $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_{n+1} \geq 0$ $\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right) : \tilde{u} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i u_i$.

Quindi

$$\begin{aligned} \tilde{H}(x, p) - \epsilon &\leq (-f_1(x) - f_2(x)\tilde{u})p - \ell(x, \tilde{u}) = \\ &= (-f_1(x) - f_2(x) \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i u_i)p - \ell(x, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i u_i) \leq \\ &\leq -f_1(x)p - \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f_2(x)u_i p - \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \ell(x, u_i) \quad (\ell \text{ concava}) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i [-f_1(x)p - f_2(x)u_i p - \ell(x, u_i)] \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \sup_{u \in \mathcal{U}} \{(-f_1(x) - f_2(x)u)p - \ell(x, u)\} = H(x, p) \end{aligned}$$

L'uguaglianza è verificata considerando l'arbitrarietà di ϵ . □

Capitolo 5

Esempio Applicativo

Si è visto come in generale i metodi sopracitati siano applicabili a problemi almeno lineari quadratici. Ora si vuole analizzare un caso applicativo, con lo scopo di chiarire i vari metodi descritti, secondo la formulazione presente in [2] e in [3].

Si consideri un carrello su rotaia (Figura 5.1) con effetto di attrito trascurabile condotto da due motori a razzo posti alle estremità. La dinamica del sistema è di fatto molto semplice: definita la posizione p e la velocità $\dot{p} = q$ il vettore di stato è $\mathbf{x}(t) = (p(t), q(t))$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + u(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad u(t) \in [-1, 1] \quad u(\cdot) \text{ misurabile}$$

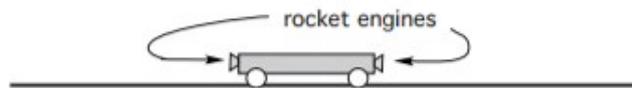


Figura 5.1: Carrello su rotaia [7]

Il controllo $u(\cdot)$ è definito per semplicità come solamente misurabile, sebbene sia più frequente avere a che fare con funzioni meno patologiche per

quanto riguarda i controlli, per esempio funzioni costanti a tratti. Il target del problema in esame è $\mathcal{T} = (0, 0) : (p(t_1), q(t_1)) = (0, 0)$ per t_1 non specificato.

I criteri di resa sono incorporati nel funzionale costo

$$P[u(\cdot)] = \int_0^{t_1} (\lambda_1 + \lambda_2 q^2(t) + \lambda_3 |u(t)|) dt \quad \lambda_k \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

Si paragona ora l'insieme raggiungibile nel caso $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{BBPC}$ e nel caso generico. Nel primo caso, con $u(t) = 1$ su qualche intervallo a partire da $t = 0$

$$(+) \quad \dot{p} = q, \dot{q} = 1 \implies q\dot{q} = \dot{p} \implies q^2(t) - q_0^2 = 2[p(t) - p_0]$$

Nel caso in cui $u(t) = -1$

$$(-) \quad \dot{p} = q, \dot{q} = -1 \implies q\dot{q} = -\dot{p} \implies q^2(t) - q_0^2 = -2[p(t) - p_0]$$

La risposta ai due controlli si muove su due rami di parabola $q^2 = \pm 2p - \alpha$ con α costante (Figura 5.2). Considerando la natura del controllo è possibile ottenere traiettorie paraboliche con punti di variazione del controllo. Il sistema in analisi è autonomo e la natura delle traiettorie non dipenderà dal momento in cui avvenga la variazione del controllo ma solo dallo stato in cui essa avvenga. L'equazione descrittiva della dinamica è lineare, garantendo l'unicità della soluzione e della traiettoria per un definito stato iniziale.

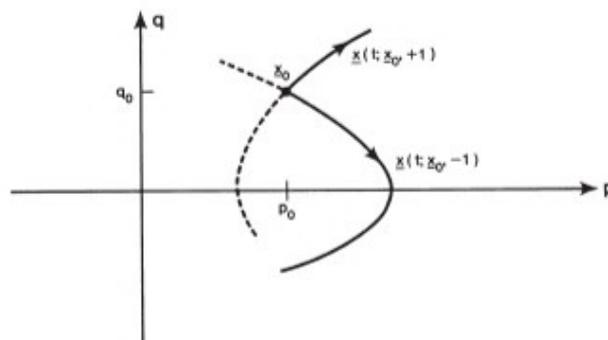


Figura 5.2: Traiettorie con politica di controllo $u = \pm 1$

Controllabilità e Controlli Bang-Bang

Per prima cosa è necessario verificare che il problema sia alla base controllabile. Utilizzando il Teorema 2.1.4 sulla completa controllabilità si nota come

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad M = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies \text{rg}(M) = 2$$

Inoltre considerando che l'unico autovalore della matrice della dinamica A è $\lambda = 0$ segue dal Teorema 2.1.5 che $\mathcal{C} = \mathbb{R}^2$, ovvero per il problema in analisi di fatto *ogni* stato iniziale sarebbe conducibile al target.

La regione raggiungibile dal controllo $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{BBPC}$ coincide con la regione raggiungibile nel caso generico, in quanto sono valide le condizioni del Principio Bang-Bang 2.3.2.

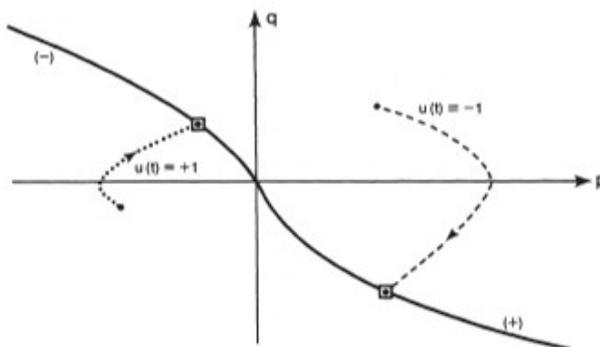


Figura 5.3: (-) : $q = \sqrt{-2p}$, $p \leq 0$ (+) : $q = -\sqrt{2p}$, $p \geq 0$

Per la validità del principio Bang-Bang è possibile specificare che per raggiungere il target sarebbe sufficiente utilizzare la seguente politica di controllo (Figura 5.3):

- 1 $\mathbf{x}(t)$ giace sopra $(+) \cup (-)$ allora si usi $u(t) = -1$ fino all'intercettazione della curva e poi si cambi controllo a $u(t) = 1$
- 2 $\mathbf{x}(t)$ giace sotto $(+) \cup (-)$ allora si usi $u(t) = 1$ fino all'intercettazione della curva e poi si cambi controllo a $u(t) = -1$

Principio di Massimo di Pontryagin

La politica di controllo appena definita però è dedotta da Teoremi che non considerano la definizione di un funzionale costo e un controllo ottimo. Si

dimostrerà che perchè il controllo sia ottimo deve valere una condizione abbastanza stringente su di esso, caratteristica dell'applicazione del PMP.

Il problema può essere affrontato dopo aver introdotto il costo dinamico $x^0[t] = \int_0^t q^2(s)ds$ con $\lambda_1 = \lambda_3 = 0, \lambda_2 = 1$ da cui il vettore di stato esteso $\hat{\mathbf{x}}[t] = (x^0[t], p[t], q[t])^T$, si vuole dimostrare che per un funzionale costo così definito non può esistere controllo ottimo a meno di non trovarsi inizialmente sulla curva $(+) \cup (-)$. Porre il problema ha senso perchè sono valide le ipotesi di convessità ed è garantita la sufficienza del PMP.

Si definisce il co-stato e l'aggiunto alla linearizzazione

$$\hat{\mathbf{w}}(t) = \begin{bmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{bmatrix} \quad \dot{\hat{\mathbf{w}}}(t) = -[\hat{\mathbf{f}}_{\hat{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}[t], u(t))]^T \hat{\mathbf{w}}(t)$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{\hat{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}, u)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2q & 1 & 0 \end{bmatrix} \implies \dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0, \dot{\gamma} = -2q\alpha - \beta$$

Segue che $\alpha(t) = \alpha(0), \beta(t) = \beta(0)$ e che l'Hamiltoniana è definibile come

$$H(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{x}, v) = \langle \hat{\mathbf{w}}, \hat{\mathbf{f}} \rangle = \alpha q^2 + \beta q + \gamma v$$

Il PMP in questo caso afferma che se la coppia $(\hat{\mathbf{x}}[\cdot], u(\cdot))$ è ottima allora esiste un co-stato $\hat{\mathbf{w}}(\cdot) : \forall t \in [0, t_1] H = \alpha(0)q^2[t] + \beta(0)q[t] + \gamma(t)v \leq 0 \forall v \in [-1, 1]$ e $H = 0$ per $v = u(t)$. Inoltre

$$(iii) \quad w^0(t) = \alpha(t) = \alpha(0) \leq 0 \quad \text{ovunque (controllo speciale)}$$

Sono possibili due scenari:

1 $\alpha(0) = 0$

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= 0 \implies \gamma(t) = -\beta(0)t + \gamma(0) \\ \max_{-1 \leq v \leq 1} H &= \max_{-1 \leq v \leq 1} \beta(0)q[t] + [\gamma(0) - \beta(0)t]v = \\ = M(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{x}) &= \max_{-1 \leq v \leq 1} \beta(0)q[t] + |\gamma(0) - \beta(0)t| = 0 \quad \text{ovunque} \end{aligned}$$

Segue che

$$\begin{aligned} u(t) &= \text{sgn}[\gamma(0) - \beta(0)t] \\ M &= \beta(0)q[t] + |\gamma(0) - \beta(0)t| = 0 \\ (iii) \hat{\mathbf{w}}(t) &\neq \hat{\mathbf{0}} \implies \gamma(0) - \beta(0)t \neq 0 \forall t \end{aligned}$$

Si nota come dalla condizione (iii) il controllo $u(\cdot)$ sia necessariamente un controllo Bang-Bang con al massimo un cambio di controllo.

Ora:

- Ipotesi: $\gamma(t)$ non cambia segno. Dalla condizione precedente segue che $u(t) = \pm 1$, ovvero il target è raggiungibile solo nel caso in cui lo stato iniziale sia già in $(+) \cup (-)$.
- Ipotesi: $\gamma(t)$ cambia segno ad un $t = t^* > 0$, $\gamma(0) \neq 0$, $\beta(0) \neq 0$ e

$$\gamma(t^*) = 0 \implies H = \beta(0)q[t^*] = M = 0 \implies q[t^*] = 0$$

Questo significa che $u(t)$ cambia controllo in t^* . Per colpire il target per qualche $t_1 > t^*$ sarà necessario trovarsi su $(+) \cup (-)$ in t^* , ma l'unico punto a $q[t^*] = 0$ su tale curva è appunto il target. Il cambio di controllo non è necessario e lo stato iniziale deve trovarsi su $(+) \cup (-)$.

2 $\alpha(t) < 0$ L'equazione aggiunta è lineare ed è possibile assumere che $\alpha(t) = -1$ senza modificare $\max H = 0$

$$\begin{aligned} H(\hat{\mathbf{w}}, \mathbf{x}, v) &= -q^2[t] + \beta(0)q[t] + \gamma(t)v \\ \max_{-1 \leq v \leq 1} H &= M = -q^2[t] + \beta(0)q[t] + |\gamma(t)| \implies u(t) = \text{sgn}[\gamma(t)] \end{aligned}$$

Le equazioni descrittive sono equivalenti al caso precedente, ma non è assicurato che $\gamma(t)$ sia lineare. Si procede con lo studio di questa funzione:

$$\dot{\gamma}(t) = 2q[t] - \beta(0) \implies \ddot{\gamma}(t) = 2u(t) = 2\text{sgn}[\gamma(t)]$$

Ovvero γ è continua a tratti, segue necessariamente che (Figura 5.4)

$$\begin{aligned} \gamma(t^*) > 0 &\implies \gamma(t) \text{ concava verso l'alto vicino a } t^* \\ \gamma(t^*) < 0 &\implies \gamma(t) \text{ concava verso il basso vicino a } t^* \end{aligned}$$

Questo significa che $\gamma(t)$ non può avere due zeri distinti, a meno che non si annulli su un intero intervallo I, in cui $\dot{\gamma}(t) = \gamma = 0$, ovvero

$$2q[t] - \beta(0) = 0 \implies q[t] \text{ costante} \implies \dot{q}[t] = 0 = u(t)$$

La richiesta che $u(t)$ si annulli su un intero intervallo non è però possibile, con considerazioni totalmente equivalenti al primo caso. Segue che non è possibile neppure un cambio di controllo, perchè la nullità in almeno un punto sarebbe necessaria. Un controllo ottimo esiste quindi solo per gli stati iniziali che si trovano sulla curva $(+) \cup (-)$.

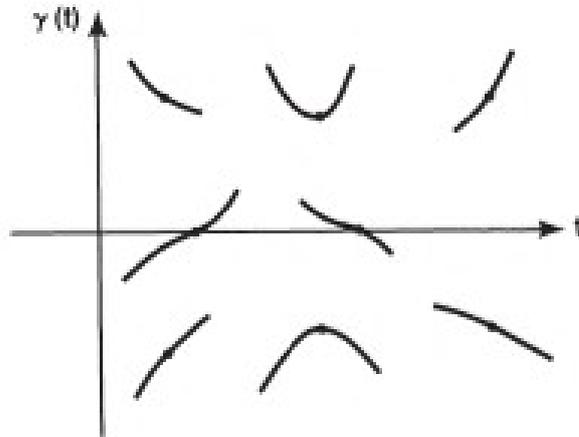


Figura 5.4: Possibili forme locali di $\gamma(t)$, i punti sono $(\tau, \gamma(\tau))$

Equazioni di Hamilton-Jacoby-Bellman

Considerando un funzionale costo $P[u(\cdot)] = \int_0^\tau dt = \tau$ con $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ si definisce la generica funzione tempo minimo $V(p, q)$, non dipendente dalla variabile temporale dato il sistema autonomo. Si vuole dimostrare che per un funzionale costo così definito un controllo bang-bang è ottimo perché la funzione tempo minimo relativa soddisfa l'HJB. Si sottolinea come non si sia esattamente sotto le ipotesi del Teorema 4.2.2 anche se la regolarità delle funzioni in gioco permette di procedere ugualmente. Considerando il principio di DP e l'HJB essa deve minimizzare il funzionale costo, segue

$$\begin{cases} 0 = \inf_{u \in \mathcal{U}} \{r(x, u) + \nabla_x V(t, x)^T \mathbf{f}(x, u)\}, & \mathbf{f} = (q, u), \quad r = 1 \\ V(T, x) = g(x) \end{cases}$$

Ovvero

$$\inf_{|u| \leq 1} \{qV_p + uV_q + 1\} = 0 \quad \begin{cases} qV_p + |V_q| + 1 = 0 \\ V(0, 0) = 0 \end{cases}$$

Si definiscono ora le due regioni individuate da (+) e (-) come

- $I = \{(p, q) : p \geq -\frac{1}{2}q|q|\}$
- $II = \{(p, q) : p \leq -\frac{1}{2}q|q|\}$

Si considera \mathbf{x}_0 appartenente alla prima regione, con $t_0 = 0$. La politica di controllo deve necessariamente essere $u(t) = -1$ e la risoluzione delle equazioni di moto fornisce

$$q^2[t] = q_0^2 + 2p_0 - 2p[t]$$

Il cambio di controllo c avviene quando si intercetta la curva $q^2 = 2p$, da cui

$$(p_c, q_c) = \left(\frac{1}{4}(2p_0 + q_0^2), \left(p_0 + \frac{1}{2}q_0^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)$$

con un tempo di cambio $t_c = q_0 - q_c$.

Dopo il cambio il tempo necessario per raggiungere il target è $t_1 - t_c = t_c - q_c = q_0 - 2q_c$ ($q_c < 0$).

Segue che per il problema in (I) il tempo richiesto nel caso migliore è

$$P[u(\cdot)] = t_1 = q_0 + \sqrt{2q_0^2 + 4p_0}$$

La funzione tempo minimo è definita quindi per entrambe le regioni

$$V(x) = \begin{cases} q_0 + 2\sqrt{p_0 + \frac{1}{2}q_0^2} & (I) \\ -q_0 + 2\sqrt{-p_0 + \frac{1}{2}q_0^2} & (II) \end{cases}$$

Calcolando le derivate parziali nella regione (I) considerando uno stato iniziale qualsiasi per l'applicazione dell'HJB

$$\begin{cases} V_q = 1 + \left(p + \frac{q^2}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} q \\ V_p = \left(p + \frac{q^2}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Segue che per la regione (I)

$$qV_p + |V_q| + 1 = -q\left(p + \frac{q^2}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} - 1 - \left(p + \frac{q^2}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} q + 1 = 0$$

ovvero l'equazione HJB regge nella regione (I). Lo stesso si può dimostrare per la regione (II).

Si noti come lungo la curva $(+)\cup(-)$ il funzionale costo non sia differenziabile con continuità anche se continuo. Questo è un' esempio dell'insorgenza di limiti nell'applicazione dell'HJB.

Bibliografia

- [1] Wendell H. Fleming, Raymond W. Rishel, *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Springer-Verlag (1975)
- [2] J. Macki, A. Strauss, *Introduction to Optimal Control Theory*, Springer-Verlag (1982).
- [3] Lawrence C. Evans, *An Introduction to Mathematical Optimal Control Theory*, Department of Mathematics, University of California, Berkeley (1983), <https://math.berkeley.edu/~evans/control.course.pdf>
- [4] Dimitri P. Bertsekas, *Dynamic Programming and Optimal Control*, Athena Scientific (1995).
- [5] F. Bagagiolo, *Appunti di corso Mathematical Control Theory*, Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Trento (2007), <http://www.science.unitn.it/~bagagiol/controllo.pdf.pdf>
- [6] F. Bagagiolo, *Breve introduzione alle soluzioni di viscosità per equazioni di Hamilton-Jacoby*, Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Trento (2007), <http://www.science.unitn.it/~bagagiol/minicorso.pdf>
- [7] A. Bressan, *Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations and Optimal Control Problems*, Department of Mathematics, Penn State University (2011), <http://www.math.psu.edu/bressan/PSPDF/hj.pdf>
- [8] M. Bramanti, *Introduzione alla teoria della misura e dell'integrale di Lebesgue*, Politecnico di Milano (2012), http://www1.mate.polimi.it/~bramanti/corsi/pdf_metodi/Lebesgue4.pdf
- [9] *Enciclopedia Italiana*, Zanichelli, Appendice 7.